Bir Olayın Olasılığı

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{A'nın\ eleman\, sayısı}{S'nin\ eleman\, sayısı}$$

Örnek Bir zar atıldığında zarın üstünde bulunan noktaların sayısı gözlensin. Çift sayı gelmesi olasılığı nedir?

Çözüm: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ tüm olanaklı sonuçların kümesidir.
A: çift sayı elde edilmesi olayı olsun, $A = \{2, 4, 6\}$ olacağından

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

olacaktır.

Olasılık ile ilgili örnekler

Örnek 52 kartlık bir iskambil destesinden rasgele bir kart çekilsin, çekilen kartın,

a) Kupa birlisi,
b) Kupa,
c) Birli gelmesi,

olasılığı nedir?

Çözüm: Aşağıdaki olaylar tanımlanabilir.
A: Kart kupa birlisidir.
B: Kart kupadır.
C: Kart birlidir.

a) 52 kart olduğundan ve yalnız bir tek kupa birlisi olduğundan istenen olasılık $P(A) = 1/52$'dir.
b) 52 kartlık bir destede 13 tane kupa vardır. Bu nedenle, istenen olasılık $P(B) = 13/52 = 1/4$'tür.
c) 52 kartlık bir destede 4 tane birli vardır. Bu nedenle, istenen olasılık, $P(C) = 4/52 = 1/13'$ tür.

Örnek Bir çift zar atılsın. Toplamın 8 gelmesi olasılığı nedir? Zarlardan birinde 3 diğerinde 4 gelmesi olasılığı nedir?

Çözüm: S örnek uzayı

$$\begin{aligned} S = \{&(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\ &(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\ &(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\ &(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\ &(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\ &(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\} \end{aligned}$$

olarak yazılırsa, örnek uzayın eleman sayısının 36 olduğu görülür. A: toplamın 8 gelmesi olayı olsun, buna göre,

$$A = \{\ (2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\ \}$$

uygun sonuçların kümesidir. Böylece toplamın 8 gelmesi olasılığı $P(A) = 5/36$ dır. B: zarların birinde 3, diğerinde 4 gelmesi olayı olsun, buna göre,

$$B = \{(3,4),(4,3)\}$$

uygun sonuçların kümesidir. O halde $P(B) = 2/36 = 1/18$ olarak bulunur.

Örnek Bir para iki kez atılsın.

a) İki kez tura,

b) İki kez yazı,

c) Bir kez yazı, diğerinde tura gelmesi olasılığı nedir?

Çözüm: Tüm olanaklı sonuçların kümesi, $S = \{\ YY, TY, YT, TT\ \}$ olarak yazılır.

a) İki tura olayına uygun örnek nokta yalnız TT'dir. Bu nedenle $P(TT) = 1/4$'tür.

b) İki yazı olayına uygun örnek nokta yalnız YY'dir. Bu nedenle, $P(YY) = 1/4$'tür.

c) Bir yazı, bir tura olayına uygun örnek noktalar, YT ve TY'dir. Bu nedenle, $P = (\{\ TY, YT\}) = 2/4 = 1/2$ olarak bulunur.

Örnek Bir para üç kez atılsın. En az bir kez tura gelmesi olasılığı nedir?

Çözüm: Bir paranın üç kez atılmasında örnek uzay,

$$S = \{TTT, YTT, TYT, TTY, YYT, YTY, TYY, YYY\}$$

olarak bulunur. A: En az bir kez tura gelmesi olayı olsun. Bu durumda, uygun sonuçların kümesi,

$$A = \{TTT, YTT, TYT, TTY, YYT, YTY, TYY\}$$

olduğundan $P(A) = 7/8$ olarak bulunur.

Örnek Bir para üç kez atılsın. En az bir kez tura gelmesi olasılığı nedir?

Çözüm: Bir paranın üç kez atılmasında örnek uzay,

$$S = \{TTT, YTT, TYT, TTY, YYT, YTY, TYY, YYY\}$$

olarak yazılır. A: En az bir kez tura gelmesi olayı olsun. Bu durumda, uygun sonuçların kümesi,

$$A = \{TTT, YTT, TYT, TTY, YYT, YTY, TYY\}$$

olduğundan $P(A) = 7/8$ olarak bulunur. Ayrıca A olayının tümleyeni hiç tura gelmemesi olayıdır. Bu durumda, $A' = \{YYY\}$ olacağından olasılıklarla ilgili teoremden, $P(A) = 1 - P(A') = 1 - 1/8 = 7/8$ elde edilir. Görüldüğü gibi tümleyen kümeyi oluşturmak daha kolaydır.

Örnek İki zarın bir kez atılışında toplamın 7 ya da 10 gelmesi olasılığı nedir?

Çözüm: Toplamın 7 olması olayı A, toplamın 10 olması olayı B olayı olmak üzere,

$$A = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3)\ (5,2)\ (6,1)\}$$

$$B = \{(4,6), (5,5), (6,4)\}$$

olarak yazılabilir. Daha önceki örnekte örnek uzayın eleman sayısı 36 olarak bulunmuştu. A ve B ayrık olaylar olduğundan

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{6}{36} + \frac{3}{36} = \frac{1}{4}$$

olarak bulunur.

Örnek 52 kartlık bir iskambil destesinden rasgele bir kart çekildiğinde, bu kartın bir birli veya karo olması olasılığı nedir?

Çözüm: Karo çekilmesi olayı A, As çekilmesi olayı B olmak üzere, $A \cap B$ olayı karo birli olması olayıdır. Destede 13 tane karo 4 tane as vardır. Buna göre istenen olasılık,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ile hesaplanır. $P(A) = 13/52, P(B) = 4/52, P(A \cap B) = 1/52$ olduğundan

$$P(A \cup B) = \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52}$$

olarak bulunur.

Örnek $\{1, 2, 3, 4\}$ rakamları ile kaç tane 2 basamaklı sayı yazılabilir (rakamlar tekrarlanmayacak)?

Çözüm: Onlar basamağı 4 rakamdan birisiyle oluşturulabilir. Onlar basamağı oluşturulduktan sonra birler basamağı geriye kalan 3 rakamdan birisi kullanılarak oluşturulur. Bu nedenle $N_1 = 4$, $N_2 = 3$ olduğundan, örnek noktalarının sayısı, çarpım kuralına göre 4.3=24 olur.

Örnek $\{1,2,3,4\}$ rakamları ile kaç tane 3 basamaklı sayı yazılabilir (rakamlar tekrarlanmayacak)?

Çözüm: Yüzler basamağı 4 rakamdan birisiyle oluşturulabilir. Yüzler basamağı oluşturulduktan sonra onlar basamağı 3 rakamdan birisiyle oluşturulabilir. Onlar basamağı oluşturulduktan sonra birler basamağı geriye kalan 2 rakamdan birisi kullanılarak oluşturulur. Bu nedenle, $N_1 = 4$, $N_2 = 3, N_3 = 2$ olduğundan, örnek noktalarının sayısı, çarpım kuralına göre 4.3.2=24 olur.

Örnek $\{1,2,3,4\}$ rakamları ile kaç tane 3 basamaklı çift sayı yazılabilir (rakamlar tekrarlanmayacak)?

Çözüm: İlk önce birler basamağı çift sayılar kullanılarak oluşturulur, yani birler basamağı 2 rakamdan birisiyle oluşturulabilir. Birler basamağı oluşturulduktan sonra onlar basamağı 3 rakamdan birisiyle oluşturulabilir. Onlar basamağı oluşturulduktan sonra yüzler basamağı geriye kalan 2 rakamdan birisi kullanılarak oluşturulur. Bu nedenle, $N_1 = 2$, $N_2 = 3$, $N_3 = 2$ olduğundan, örnek noktalarının sayısı, çarpım kuralına göre 2.3.2=12 olur.

Örnek $\{0,1,2,3,4\}$ rakamları ile kaç tane 3 basamaklı sayı yazılabilir (rakamlar tekrarlanmayacak)?

Çözüm: İlk önce yüzler basamağı oluşturulur. Yüzler basamağı 4 rakamdan birisiyle oluşturulabilir. Yüzler basamağı oluşturulduktan sonra onlar basamağı 4 rakamdan birisiyle oluşturulabilir. Onlar basamağı oluşturulduktan sonra birler basamağı geriye kalan 3 rakamdan birisi kullanılarak oluşturulur. Bu nedenle, $N_1 = 4$, $N_2 = 4$, $N_3 = 3$ olduğundan, örnek noktalarının sayısı, çarpım kuralına göre 4.4.3=48 olur.

Örnek 1, 2, 3, 4, 5 rakamları birer kağıt parçasına yazılarak bir torbaya atılıyor, ardışık olarak çekileni geriye atmaksızın rasgele üç kağıt parçası çekiliyor ve sırasıyla bir sayının; birler, onlar, yüzler basamaklarını oluşturuyor ise böyle bir deneyde,

- **a)** 123 sayısının elde edilmesi olasılığı nedir?
- **b)** Çift sayı gelmesi olasılığı nedir?

c) 200'den büyük bir sayı gelmesi olasılığı nedir?

Çözüm: Örnek uzayın eleman sayısını bulalım. Yüzler basamağı 5 rakamdan birisiyle oluşturulabilir. Yüzler basamağı oluşturulduktan sonra onlar basamağı 4 rakamdan birisiyle oluşturulabilir. Onlar basamağı oluşturulduktan sonra, birler basamağı geriye kalan 3 rakamdan birisi kullanılarak oluşturulur. Bu nedenle, $N_1 = 5$, $N_2 = 4, N_3 = 3$ olduğundan, örnek noktalarının sayısı, çarpım kuralına göre 5.4.3=60 olur.

a) A: 123 sayısının gelmesi olayı olsun, A nın eleman sayısı 1 olduğundan $P(A) = 1/60$ olarak bulunur.

b) B: Çift sayı gelmesi olayı olsun. B kümesinin eleman sayısını bulalım. Çift sayı olması için birler basamağına 2, 4 rakamları 2 farklı biçimde gelir. Birler basamağı oluşturulduktan sonra yüzler basamağı kalan 4 rakamdan birisiyle oluşturulur. Geriye kalan 3 rakamla da onlar basamağı oluşturulur. Bu nedenle, $N_1 = 2$, $N_2 = 4, N_3 = 3$ olduğundan, B kümesinin eleman sayısı, çarpım kuralına göre 2.4.3=24 ve istenen olasılık $P(B) = 24/60$ olur.

c) C: 200'den büyük bir sayı gelmesi olayı olsun. C kümesinin eleman sayısını bulalım. 200 den büyük sayı olması için yüzler basamağına 2,3,4,5 rakamları 4 farklı biçimde gelir. Yüzler basamağı oluşturulduktan sonra onlar basamağı kalan 4 rakamdan birisiyle oluşturulur. Geriye kalan 3 rakamla da birler basamağı oluşturulur. Bu nedenle, $N_1 = 4$, $N_2 = 4, N_3 = 3$ olduğundan, C kümesinin eleman sayısı, çarpım kuralına göre 4.4.3=48 ve istenen olasılık $P(B) = 48/60$ olur.

Örnek $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ rakamları ile oluşturulan, farklı rakamlı 6 basamaklı sayılardan biri rasgele seçildiğinde, çift sayı olması olasılığı nedir?

Çözüm. S kümesi $1,2, \ldots ,9$ rakamları ile oluşturulan farklı rakamlı 6 basamaklı sayıların kümesi (örnek uzay) olmak üzere, örnek uzayın eleman sayısı, $n = 9, r = 6$ olmak üzere

$$P(9,6) = \frac{9!}{(9-6)!} = \frac{9!}{3!} = 9.8.7.6.5.4$$

olarak bulunur. Çekilen sayının çift sayı olması olayı, $A = \{x \in S : x\, çift\, say\square\}$ olmak üzere, A kümesinin eleman sayısının bulunması gerekmektedir. Çift sayı olabilmesi için birler basamağının çift sayı olması gerekir. Bu 4 farklı yolla yapılabilir. Bu yapıldıktan sonra diğer basamaklar için sırasıyla 8, 7, 6, 5, 4, 4 yol vardır. Çarpım kuralı gereğince bu yoların sayısı

$$n(A) = 8.7.6.5.4.4$$

olarak bulunur. Bu durumda, istenen olasılık

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{8.7.6.5.4.4}{9.8.7.6.5.4} = \frac{4}{9}$$

olarak yazılır.

Bağımsız Olaylar

Eğer bir A olayının ortaya çıkması B olayının ortaya çıkmasına bağlı değilse A ve B olayları **bağımsız olaylar**dır denir ve aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

Aksi durumda A ve B olaylarına bağımlı olay denir.

Örnek Bir zar atma deneyinde çift gelmesi olayı ile tek gelmesi olayı bağımsız mıdır?

Çözüm: Örnek uzay $S = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ olmak üzere, A ile B olayının kesişimi boş küme olduğundan $P(A \cap B) = 0$ ve $P(A) = 1/2, P(B) = 1/2$ olarak bulunur.

$$P(A \cap B) \neq P(A).P(B)$$

olduğundan Çift gelmesi ile tek gelmesi olayları bağımlı olaylardır.

Örnek Üç parayı birlikte atma deneyinde, A: İlk atış yazı, B: İkinci atış yazı ve C: İlk iki atış yazı olayları tanımlansın.

- **a)** A ile B olayının bağımsız,
- **b)** A ile C olayının bağımlı,
- **c)** B ile C olayının bağımlı,

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Örnek uzay $S = \{TTT, YTT, TYT, TTY, YYT, YTY, TYY, YYY\}$ 8 elemanlıdır.
$A = \{ YTT, YYT, YTY, YYY\}$, $B = \{ TYT, YYT, TYY, YYY\}$, $C = \{ YYT, YYY\}$ olmak üzere,
$A \cap B = \{ YYY, YYT\}$, $A \cap C = \{ YYY, YYT\}$, $B \cap C = \{ YYY, YYT\}$,

$$P(A) = \frac{4}{8}, P(B) = \frac{4}{8}, P(C) = \frac{2}{8}, P(A \cap B) = \frac{2}{8}, P(A \cap C) = \frac{2}{8}, P(B \cap C) = \frac{2}{8}$$

olarak bulunur.

- **a)** $P(A).P(B) = \frac{4}{8}.\frac{4}{8} = \frac{1}{4} = P(A \cap B)\ A\ ile\ B$ bağımsız
- **b)** $P(A).P(C) = \frac{4}{8}.\frac{2}{8} \neq P(A \cap C) = \frac{2}{8}\ A\ ile\ C$ bağımlı
- **c)** $P(B).P(C) = \frac{4}{8}.\frac{2}{8} \neq P(B \cap C) = \frac{2}{8}\ B\ ile\ C$ bağımlı.

Örnek Üç parayı birlikte atma deneyinde,

$$A = \{TYT, YYT, YYY, TTT\}$$
$$B = \{YYY, TTY, YYT, YTT\},$$
$$C = \{TYT, TTY, TYY, YYY\}$$
olayları tanımlanıyor. A, B, C olayları tam bağımsız mıdır?

Çözüm:

$$P(A \cap B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = P(A).P(B)$$
$$P(A \cap C) = \frac{2}{8} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = P(A).P(C)$$
$$P(B \cap C) = \frac{2}{8} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = P(A).P(C)$$
$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{8} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = P(A).P(B).P(C)$$
elde edilir. Olaylar tam bağımsızdır.

Koşullu olasılık, bir olayın başka bir olayın meydana gelmesi koşulu altında ortaya çıkması olasılığıdır. B olayı bilindiğinde A olayının ortaya çıkması olasılığı,
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \;\; P(B) \neq 0$$
ile gösterilir ve B olayı verilmişken A olayının **koşullu olasılığı** olarak adlandırılır. Benzer şekilde, A olayı verilmişken B olayının koşullu olasılığı,
$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \;\; P(A) \neq 0$$
olarak tanımlanır.

Örnek İki zar birlikte atılsın. Zarların üzerindeki noktaların sayısının toplamı 6 ise zarlardan birinin 2 gelmesi olasılığı nedir?

Çözüm: $A = \{(2,4), (4,2)\}\; ve\; B = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}$ olmak üzere, $P(B) = 5/36$ ve $P(A \cap B) = \frac{2}{36}$ ve $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ olduğundan
$$P(A|B) = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{2}{5}$$
olarak bulunur.

Örnek Diş hekimliği fakültesinde okuyan öğrencilerin %30'u biyoistatistikten, %20'si biyokimyadan ve %15'i hem biyoistatistik hem de biyokimyadan başarısız olmuştur. Öğrenciler arasından rasgele seçilen bir öğrenci için aşağıdaki olasılıkları bulalım.

a) Biyoistatistikten başarısız ise, biyokimyadan da başarısız olması olasılığı nedir?

b) Biyokimyadan başarısız ise, biyoistatistikten başarısız olma olasılığı nedir?

Çözüm:

A: Biyoistatistikten başarısız olma olayı,

B: Biyokimyadan başarısız olma olayı,

olmak üzere,

$$P(A) = 0.30, P(B) = 0.20, P(A \cap B) = 0.15$$

olarak verilmiştir. Bu verilere göre,

a)

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.15}{0.30} = 0.50$$

b)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.15}{0.20} = 0.75$$

olarak hesaplanır.

Örnek Yapılan bir çalışmada hastaların %20'si hem A ilacı, hem de B ilacı, %40'ı sadece A ilacı ve %40'ı da sadece B ilacı kullanmaktadır. Rasgele seçilen bir hastanın A ilacı kullandığı biliniyorsa, bu hastanın B ilacını da kullanması olasılığı nedir?

Çözüm:

A: A ilacı kullanma olayı,

B: B ilacı kullanma olayı,

olmak üzere

$$P(A) = 0.40, \qquad P(B) = 0.40, \qquad P(A \cap B) = 0.20$$

olarak verilmiştir. Bu verilere göre,

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.20}{0.40} = 0.5$$

olarak bulunur.

Olasılık Dağılımları

Rasgele Değişken: Bir örnek uzaydaki her rasgele olaya, sayısal bir değer atayan bir fonksiyondur. Rasgele değişken $X, Y, Z, ...$ gibi büyük harflerle gösterilir. Rasgele değişkenin aldığı değerler $x, y, z, ...$ gibi küçük harflerle gösterilir. Bir S örnek uzayındaki her rasgele olaya, R reel sayıların alt kümesinden sayısal bir değer atayan X fonksiyonuna rasgele değişken denir ve

$$X: S \rightarrow R$$
$$s \rightarrow X(s)$$

şeklinde yazılır.

$$\{X = a\}$$
$$\{b < X < c\}$$
$$\{b < X \leq c\}$$
$$\{b \leq X \leq c\}$$
$$\{X < c\}$$
$$\{X \leq c\}$$
$$\{X > b\}$$
$$\{X \geq b\}$$

Örnek Bir torbada 5 siyah ve 5 beyaz top bulunsun. Çekileni yerine koyma koşulu ile torbadan sırayla 2 top çekiliyor ve çekilen beyaz top sayısı X ile gösteriliyor. X rasgele değişkeninin aldığı değerleri ve bu değerleri alma olasılıklarını bulalım. Deneyin örnek uzayı

$$S = \{SB, BB, BS, SS\}$$

dır. Örnek noktalara B (beyaz)'ların sayısını eşleyen X fonksiyonu bir rasgele değişkendir. Bu rasgele değişkenin değerleri şöyledir.

$$X(SS) = x_1 = 0$$
$$X(BS) = x_2 = 1$$
$$X(SB) = x_3 = 1$$
$$X(BB) = x_4 = 2$$

O halde X rasgele değişkeninin değer kümesi $\{0, 1, 2\}$ dir. Bu rasgele değişkenin aldığı değerlerin olasılıkları,

$$P(X = 0) = 1/4$$
$$P(X = 1) = 2/4$$
$$P(X = 2) = 1/4$$

olarak verilir. Buna göre, aşağıdaki olasılıklar da söylenebilir.

$$P(X < -1) = 0$$
$$P(X < 3) = 1$$
$$P(X < 2) = 3/4$$
$$P(X > 3) = 0$$

Y rasgele değişkeni de siyah topların sayısının gözlenmesi şeklinde tanımlanırsa, Y rasgele değişkeni

$$Y(SS) = y_1 = 2$$
$$Y(BS) = y_2 = 1$$
$$Y(SB) = y_3 = 1$$
$$Y(BB) = y_4 = 0$$

ile gösterilir. Y rasgele değişkeninin değer kümesi $\{0, 1, 2\}$ dir. Bu rasgele değişkenin aldığı değerlerin olasılıkları,

$$P(Y = 0) = 1/4$$
$$P(Y = 1) = 2/4$$
$$P(Y = 2) = 1/4$$

şeklindedir.

Örnek Bir paranın 3 kez atılması ve gelen yazıların sayısının gözlenmesi deneyi için X rasgele değişkeni aşağıdaki şekilde tanımlanır. Örnek uzayın elemanları

$$S = \{TTT, YTT, TYT, TTY, YYT, YTY, TYY, YYY\}$$

olmak üzere,

$$X(TTT) = x_1 = 0$$
$$X(YTT) = x_2 = 1$$
$$X(TYT) = x_3 = 1$$
$$X(TTY) = x_4 = 1$$
$$X(YYT) = x_5 = 2$$
$$X(YTY) = x_6 = 2$$
$$X(TYY) = x_7 = 2$$
$$X(YYY) = x_8 = 3$$

olacaktır. X rasgele değişkeninin aldığı değerler kümesi $\{0, 1, 2, 3\}$ dir. Bu değerleri alması olasılıkları ise,

$$P(X = 0) = 1/8$$
$$P(X = 1) = 3/8$$
$$P(X = 2) = 3/8$$
$$P(X = 3) = 1/8$$

olarak verilir. Görüldüğü gibi bu örneklerde X rasgele değişkenin aldığı değerlerin olasılıkları toplamı 1'e eşittir. Rasgele değişkenler esas olarak iki farklı kritere göre iki farklı şekilde sınıflandırılabilir. Bir kriter boyut. Buna göre değişkenler, tek boyutlu ve çok boyutlu ya da bileşik rasgele değişkenler şeklinde gruplandırılabilir. Diğeri ise süreklilik. Bu bakımdan da değişkenler kesikli ve sürekli olarak ayrılabilir.

Kesikli Olasılık Dağılımları

Kesikli rasgele değişkenler sayılabilir sayıda olanaklı değerler alan değişkenlerdir.

Kesikli X rasgele değişkeninin alması olanaklı değerleri ve olasılıkları gösteren fonksiyona olasılık fonksiyonu denir.

$$p_i = P(X = x_i) \qquad i = 1,2,\dots,n$$

ile gösterilir. Bu olasılıkları, rasgele değişkenin alabileceği x_i değerlerinin bir fonksiyonu olarak düşünelim.

$$p_i = f(x_i)$$

A, $x_1, x_2, \dots, x_n$ noktalarının bir alt kümesi olsun, bu durumda

$$P(A) = \sum_A f(x_i)$$

olarak hesaplanır. Örneğin A olayı X rasgele değişkeninin a ile b arasında bulunması ise ($a < b$)

$$P(a < X < b) = \sum_{a<x_i<b} f(x_i)$$

olarak yazılır.

Herhangi bir fonksiyonun, kesikli bir rasgele değişken için olasılık fonksiyonu olabilmesi aşağıdaki iki koşulu sağlamasına bağlıdır.

i) $f(x_i) \geq 0$

ii) $\sum_{x_i} f(x_i) = 1$

Olasılık fonksiyonu bazen

$X = x_i$	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$P(X = x_i)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\dots$	$f(x_n)$

biçiminde tablo olarak da yazılır.

Örnek Bir torbada 5 siyah ve 3 beyaz top bulunsun. Çekileni yerine koymama koşulu ile torbadan sırayla 2 top çekiliyor ve çekilen beyaz top sayısı X ile gösteriliyor. X rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonunu yazalım.

Çözüm: Bu deney ile ilgili X rasgele değişkeninin değer kümesi $\{0, 1, 2\}$ dir. Bu rasgele değişkenin aldığı değerlerin olasılıkları, $P(X = 0) = 1/4$, $P(X = 1) = 2/4$, $P(X = 2) = 1/4$ olduğundan, olasılık fonksiyonu tablo olarak aşağıdaki şekilde verilmiştir.

$X = x_i$	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

Örnek Bir paranın 3 kez atılması ve gelen yazıların sayısının gözlenmesi deneyi için X rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonunu yazalım.

Çözüm: X rasgele değişkeninin aldığı değerler kümesi $\{0, 1, 2, 3\}$ dir. Bu değerleri alması olasılıkları ise, $P(X = 0) = 1/8$, $P(X = 1) = 3/8$, $P(X = 2) = 3/8$, $P(X = 3) = 1/8$ olduğundan, olasılık fonksiyonu tablo olarak aşağıdaki şekilde verilmiştir.

$X = x_i$	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Ayrıca olasılık fonksiyonu aşağıdaki biçimde de yazılabilir.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{8}, & x=0\\ \dfrac{3}{8}, & x=1\\ \dfrac{3}{8}, & x=2\\ \dfrac{1}{8}, & x=3\end{cases}$$

Yukarıdaki tablo ya da olasılık fonksiyonunu kullanarak,

$P(X<3)$, $P(X\geq 1)$ ve $P(1\leq X<3)$

olasılıklarını hesaplayalım.

$$P(X<3)=f(0)+f(1)+f(2)=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}=\frac{7}{8}$$

$$P(X\geq 1)=f(1)+f(2)+f(3)=\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

$$P(1\leq X<3)=f(1)+f(2)=\frac{3}{8}+\frac{3}{8}=\frac{6}{8}$$

Örnek Bir zarın atılması ve üste gelen noktaların sayısının gözlenmesi deneyi için olasılık fonksiyonunu yazalım.

Çözüm: Deney sonucunda X rasgele değişkeninin alacağı değer kümesi $\{1,2,3,4,5,6\}$ olur. Bu değerleri alma olasılıkları da 1/6 olduğundan, X rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{6}, & x=1,2,3,4,5,6\end{cases}$$

biçiminde yazılır.

Örnek X rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu,

$$f(x)=\begin{cases}cx & , \quad x=1,2,3,4\\ 0 & , \quad diğer\ yerlerde\end{cases}$$

olmak üzere aşağıdaki soruları cevaplayalım.

a) c değerini hesaplayınız.

b) $P(X=1)=?$

c) $P(2<X\leq 4)=?$

d) $P(X\leq 3)=?$

Çözüm: a) Olasılık fonksiyonu olması için, $\sum_x f(x)=1$ koşulunu sağlaması gerekir. Buna göre, $\sum_{x=1}^{4} cx=1$ olmalıdır. Yani,

$c.1+c.2+c.3+c.4=1$

$10.c=1$

$c = \frac{1}{10}$

olmalıdır. Buna göre, olasılık fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}x & , \quad x = 1,2,3,4 \\ 0 & , \quad dy \end{cases}$$

X	1	2	3	4
$P(X = x)$	0.1	0.2	0.3	0.4

biçiminde yazılabilir.

b) $P(X = 1) = 0.1$

c) $P(2 < X \leq 4) = P(X = 3) + P(X = 4)$

$= 0.3 + 0.4 = 0.7$

d) $P(X \leq 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$

$= 0.1 + 0.2 + 0.2 = 0.6$

Örnek X rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} c & , \quad x = -1,0,1,2,3,4 \\ 0 & , \quad dy \end{cases}$$

olmak üzere, aşağıdaki soruları cevaplayalım.

a) c değerini hesaplayınız.

b) $P(X = 0) =?$

c) $P(-1 \leq X < 1) =?$

d) $P(X \leq 2) =?$

Çözüm:

a) Olasılık fonksiyonu olması için $\sum_x f_X(x) = 1$ koşulunu sağlaması gerekir. Buna göre, $\sum_{x=-1}^{4} c = 1$ olmalıdır. Yani,

$c + c + c + c + c + c = 1$

$6.c = 1$

$c = \frac{1}{6}$

olmalıdır. Buna göre,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & , \quad x = -1,0,1,2,3,4 \\ 0 & , \quad dy \end{cases}$$

biçiminde yazılabilir.

b) $P(X=0)=\frac{1}{6}$

c) $P(-1 \le X < 1) = P(X=-1) + P(X=0)$

$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}$$

d)$P(X \le 2) = P(X=-1) + P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$

$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}$$

Örnek Bir su dağıtıcısının bir günde sattığı damacanaların sayısını gösteren X rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{350}x & , \quad x=1,2,\ldots,20 \\ \frac{1}{350}(25-x) & , \quad x=21,22,\ldots,25 \end{cases}$$

Buna göre aşağıdaki olasılıkları hesaplayalım.

a) 15 damacana su satması,

b) 23 damacana su satması,

c) 15'den az damacana su satması,

d) 18 ile 25 arasında damacana su satması.

Çözüm:

a)

$$P(X=15)=f(15)=\frac{1}{350}15=\frac{3}{70}$$

b)

$$P(X=23)=f(23)=\frac{1}{350}(25-23)=\frac{1}{175}$$

c)

$$P(X<15)=f(1)+\cdots+f(14)=\frac{1}{350}\left(\frac{14.15}{2}\right)=\frac{3}{10}$$

d)

$$P(18<X<25)=f(19)+f(20)+f(21)+f(22)+f(23)+f(24)$$

$$=\frac{1}{350}19+\frac{1}{350}20+\frac{1}{350}(25-21)+\frac{1}{350}(25-22)+\frac{1}{350}(25-23)+\frac{1}{350}(25-24)$$

$$=\frac{1}{350}(19+20+4+3+2+1)=\frac{49}{350}$$

Sürekli Olasılık Dağılımları

Verilerin birçoğu ölçüm sonucu elde edilir. Belirli bir barajdaki belirli tarihteki su miktarı, hava sıcaklığı, yeni doğmuş çocukların ağırlıkları, boy ölçüleri, belirli bir yoldaki arabaların hızları örnek olarak verilebilir. Bazı uygulamalarda rasgele değişken bir aralıkta ya da aralıkların koleksiyonunda herhangi bir değeri alabilir. Böyle rasgele değişkenlere **sürekli rasgele değişken** denir. Sürekli rasgele değişkenler sınırsız sayıda olanaklı değer alabilen rasgele değişkenlerdir. Böyle olunca $P(X = x) = 0$ eşitliği sürekli rasgele değişkenler için geçerli yani tek nokta için olasılık sıfırdır.

Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

X rasgele değişkeni $(-\infty, \infty)$ aralığında tanımlanan sürekli bir rasgele değişken olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan $f(x)$ fonksiyonuna X rasgele değişkeninin **olasılık yoğunluk fonksiyonu** denir.

i) $f(x) \geq 0\,, -\infty < x < \infty$

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

$f(x)$ bilindiğinde belli bir A olayının olasılığı o olay için $f(x)$ fonksiyonunun integrali alınarak bulunur. Örneğin, $A = \{x: a < x < b\}$ olsun, bu durumda

$$P(A) = P(a < X < b) = P(a < x \leq b) = P(a \leq x < b) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

olarak hesaplanır.

Örnek Aşağıdaki fonksiyonun olasılık yoğunluk fonksiyonu olabilmesi için c sabitinin değeri nedir?

$$f(x) = \begin{cases} c(3x+2) & , \quad 1 < x < 3 \\ 0 & , \quad dy \end{cases}$$

Çözüm: Olasılık yoğunluk fonksiyonu olabilmesi için $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ koşulunu sağlaması gerekir. Bu durumda,

$$c\int_1^3 (3x+2)\,dx = 1$$

olmalıdır. İntegral alınırsa $c.(\frac{3}{2}x^2 + 2x)$ bulunur, sınırlar yerine yazıldığında $c.16 = 1$ olur, buradan da $c = 1/16$ elde edilir. c sabiti yerine yazıldığında olasılık fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{16}(3x+2) & , \quad 1 < x < 3 \\ 0 & , \quad dy \end{cases}$$

olur. $P(1 < X < 2)$ olasılığını bulalım.

$$P(1 < X < 2) = \int_1^2 \frac{1}{16}(3x+2)\,dx = \frac{13}{32}$$

Örnek Belli bir tipteki ampullerin dayanma süresi (saat olarak) X rasgele değişkeni olsun. X'i sürekli rasgele değişken olarak kabul ederek X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x^3} & , \quad 1500 \leq x \leq 2500 \\ 0 & , \quad dy \end{cases}$$

ile verilsin. a sabitinin değerini hesaplayalım.

Çözüm: Olasılık yoğunluk fonksiyonu olabilmesi için $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ koşulunu sağlaması gerekir. Bu durumda,

$$a\int_{1500}^{2500} x^{-3}\,dx = 1$$

olmalıdır. İntegral alınırsa $a.(-\frac{1}{4}x^{-4})$ bulunur, sınırlar yerine yazıldığında a =7031250 olarak elde edilir. Sabit yerine yazıldığında olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{7031250}{x^3} & , \quad 1500 \leq x \leq 2500 \\ 0 & , \quad dy \end{cases}$$

şeklinde olur.

Örnek Bir poliklinikte bir doktorun hastasını muayene etme süresi (dakika olarak) X rasgele değişkeni ile gösterilsin. Sürekli X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu dakika olarak,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{c} & , \quad 0 \leq x \leq 30 \\ 0 & , \quad dy \end{cases}$$

biçiminde verilsin. c sabitinin değerini bulalım.

Çözüm: Olasılık yoğunluk fonksiyonu olabilmesi için $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ koşulunu sağlaması gerekir. Bu durumda,

$$\int_0^{30} \frac{1}{c}\,dx = 1$$

olmalıdır. İntegral alınıp sınırlar yerine yazılırsa $c = 30$ elde edilir. c sabiti yerine yazıldığında olasılık fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{30} & , \quad 0 \le x \le 30 \\ 0 & , \quad dy \end{cases}$$

olur. $P(10 < X < 20)$ olasılığını bulalım.

$$P(10 < X < 20) = \int_{10}^{20} \frac{1}{30} dx = \frac{10}{30}$$

Örnek X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} cx & , \quad 0 \le x \le 5 \\ 0 & , \quad dy \end{cases}$$

olmak üzere,

a) c değerini hesaplayınız.

b) $P(1 \le X \le 3) = ?$

c) $P(2 \le X < 4) = ?$

d) $P(X \le 3) = ?$

Çözüm:

a)

$$\int_0^5 cxdx = 1$$

$$c\int_0^5 xdx = 1$$

$$c\frac{x^2}{2}\Big|_0^5 = 1$$

$$c = \frac{2}{25}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{25}x & , \quad 0 \le x \le 5 \\ 0 & , \quad dy \end{cases}$$

b)

$$P(1 \le X \le 3) = \int_1^3 \frac{2}{25} xdx = \frac{2}{25}\frac{x^2}{2}\Big|_1^3 = \frac{2}{25}\left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{8}{25}$$

c)

$$P(2 \le X \le 4) = \int_2^4 \frac{2}{25} xdx = \frac{2}{25}\frac{x^2}{2}\Big|_2^4 = \frac{2}{25}\left(\frac{16}{2} - \frac{4}{2}\right) = \frac{12}{25}$$

d)

$$P(X \leq 3) = \int_0^3 \frac{2}{25} x dx = \frac{2}{25} \frac{x^2}{2} |_0^3 = \frac{2}{25}\left(\frac{9}{2} - 0\right) = \frac{9}{25}$$

olarak bulunur.

Örnek X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} cx^3 & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad dy \end{cases}$$

olmak üzere, c değerini hesaplayınız.

$$\int_0^1 cx^3 dx = 1$$

$$c \int_0^1 x^3 dx = 1$$

$$c \frac{x^4}{4} |_0^1 = 1$$

$$c = 4$$

$$f(x) = \begin{cases} 4x^3 & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad dy \end{cases}$$

olarak bulunur.

Örnek Bir atıcı yarıçapı 10 birim olan dairesel bir hedefe atışlar yapmaktadır. Yaptığı atışların dairenin merkezine uzaklığı X rasgele değişkeni olmak üzere, X'in olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{10 - x}{50} & , \quad 0 < x < 10 \\ 0 & , \quad dy \end{cases}$$

olduğu bilinsin. Buna göre, atıcının yaptığı bir atışta

a) $X < 1$

b) $2 < X < 5$

c) $X > 8$

olması olasılığı nedir?

Çözüm:

a)

$$P(X < 1) = \int_0^1 \frac{10 - x}{50} dx = \frac{1}{50}\left(10x - \frac{x^2}{2}\right)|_0^1 = \frac{9.5}{50}$$

b)

$$P(2 < X < 5) = \int_2^5 \frac{10 - x}{50} dx = \frac{1}{50}\left(10x - \frac{x^2}{2}\right)|_2^5 = \frac{19.5}{50}$$

c)

$$P(X > 8) = \int_8^{10} \frac{10 - x}{50} dx = \frac{1}{50}\left(10x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_8^{10} = \frac{2}{50}$$

Örnek Bir aylık deney farelerinin, uygulanan bir haftalık gıda rejimi sonucunda gram cinsinden kazandığı ağırlığın (X rasgele değişkeninin)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{108}(4x - x^2 + 5), & -1 \le x \le 5 \\ 0, & diğer\ yerlerde \end{cases}$$

olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip olduğu varsayılsın. Böyle bir gıda rejimi sonucu,

a) Kazanılan ağırlığın en az 1 gram olması,

b) 1 ile 3 gram arasında bir ağırlık kazanılması,

c) Ağırlık kaybedilmesi,

olasılığı nedir?

Çözüm: İstenen olasılıklar:

a)

$$P(X \ge 1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_1^5 \frac{3}{108}(4x - x^2 + 5)dx = \frac{70}{108}$$

b)

$$P(1 \le X \le 3) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_1^3 \frac{3}{108}(4x - x^2 + 5)dx = \frac{52}{108}$$

c)

$$P(X < 0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-1}^0 \frac{3}{108}(4x - x^2 + 5)dx = \frac{8}{108}$$